文章编号:1005-3085(2011)01-0101-08

随机微分方程解的二次型估计

马洪强[1]， 胡良剑[2,†]

(1- 复旦大学上海视觉艺术学院，上海 201620; 2- 东华大学应用数学系，上海 201620)

摘 要: 由于随机微分方程 (SDE) 的解析解求解困难，所以推导 SDE 解的不等式估计式是十分必要的．在随机系统的稳定性分析和控制设计中，李亚普诺夫函数常常采用二次型函数．本文把 SDE 解的传统的欧几里德范数形式估计式推广到 SDE 解的二次型估计式，包括解的矩估计和几乎必然估计．我们分别在加权线性增长条件和加权单边增长条件下给出了二次型矩估计式以及样本李亚普诺夫指数的上界表达式．

关键词: 随机微分方程；矩估计；几乎必然估计；二次型

分类号: AMS(2000) 60H20 **中图分类号**: O211.63 **文献标识码**: A

1 引言

为了研究随机微分方程 (SDE) 的稳定性，对随机微分方程的解进行估计具有重要意义．随机微分方程解的 Euclid 范数形式估计已被广泛研究[1]，但是对有关随机微分方程解的其它形式的估计 (比如对解的二次型估计) 还未见报道．

本文所研究的问题都是在带 σ 流 $\{\mathscr{F}_t\}_{t\geq 0}$ 的完备概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上进行的，文中用到的标记 $L^p(\Omega,R^n)$ 表示所有属于 R^n 满足条件 $E|\xi|^p<\infty$ 的随机变量 ξ 组成的集合；$\mathscr{L}^p([a,b],R^n)$ 表示所有满足条件

$$\int_a^b |f(t)|^p\mathrm{d}t<\infty,\quad \text{a.s.}$$

的 n 维 $\mathscr{F}_t$ 适应过程 $\{f(t)\}_{a\leq t\leq b}$ 组成的集合；$|x|$ 表示向量 x 的 Eulid 范数．

令 $f:R^d\times[t_0,T]\to R^d$ 和 $g:R^d\times[t_0,T]\to R^{d\times n}$ 是 Borel 可测的，$B(t)$ 为 n 维布朗运动．考虑随机微分方程

$$\mathrm{d}x(t)=f\big(x(t),t\big)\mathrm{d}t+g\big(x(t),t\big)\mathrm{d}B(t),\quad t_0\leq t\leq T, \tag{1}$$

$$x(t_0)=x_0.$$

文献 [1] 给出下列解的 p 阶矩估计和几乎必然估计．

引理 1 $p\geq 2$，$x_0\in L^p(\Omega;R^d)$，若单边增长条件成立，即存在一个常数 $\alpha>0$ 使得对所有的 $(x,t)\in R^d\times[t_0,T]$，有

$$x^T(t)f(x,t)+\frac{p-1}{2}|g(x,t)|^2\leq\alpha\big(1+|x(t)|^2\big), \tag{2}$$

那么

$$E|x(t)|^p\leq 2^{\frac{p-2}{2}}\big(1+E|x_0|^p\big)\mathrm{e}^{p\alpha(t-t_0)}. \tag{3}$$

收稿日期: 2008-05-12. **作者简介**: 马洪强 (1979年3月生)，男，硕士．研究方向：随机微分方程．

†**通讯作者**: 胡良剑 E-mail: ljhu@dhu.edu.cn

引理2 在单边增长条件(2)下，存在一个常数$\alpha > 0$，随机微分方程解的样本Lyapunov指数为

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log |x(t)| \le \alpha. \tag{4}$$

在实际应用中，我们常常要考虑SDE解的函数形式，例如，在随机稳定性分析和控制领域，有关SDE解的二次型十分重要[2,3]，特别是用Lyapunov直接法研究稳定性时，常常使用二次型[4,5]，而线性二次型高斯(LQG)问题和最优控制问题中的性能指标函数也是用二次型来表达[6,7]，另外距离判别分析中对欧氏距离加权后构成的马哈拉诺比斯(Mahalanobis)距离也是有关二次型的问题[8]等等.

p阶矩估计和几乎必然估计在研究随机p阶矩指数稳定和几乎必然指数稳定是非常重要的. 在随机控制领域，用Lyapunov直接法研究稳定性[9-11]，我们常常用二次型$V(x,t) = x^T(t)Qx(t)$来代替一般的Lyapunov函数[11,12]，其中Q为正定矩阵，那么对解的二次型形式表达式的性质分析就显得尤其重要. 本文在文献[1]的结果基础上做了推广，在第二节给出SDE解的二次型p阶矩估计式，在第三节证明了SDE解的二次型几乎必然估计式.

2 p阶矩估计

假设$x(t)$为方程(1)的解，下面我们来研究关于解的二次型p阶矩问题.

定理1 $p \ge 2$, $x_0 \in L^p(\Omega; R^d)$，若存在一常数α，则对所有的$(x,t) \in R^d \times [t_0, T]$，有

$$x^T Q f(x,t) + \frac{p-1}{2}\ \text{trace}\ \ g(x,t)^T Q g(x,t) \le \alpha(1 + x^T Q x), \tag{5}$$

其中Q为对称非负定矩阵，trace表示矩阵的秩，那么对任意的$t \ge t_0$，有

$$E\big(x^T(t)Qx(t)\big)^{\frac{p}{2}} \le 2^{\frac{p-2}{2}}\big(1 + E(x_0^T Q x_0)^{\frac{p}{2}}\big)\mathrm{e}^{p\alpha(t-t_0)}. \tag{6}$$

证明 首先，对$(1 + x^T(t)Qx(t))^{\frac{p}{2}}$用Itô公式得

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\big(1 + x^T(t)Qx(t)\big)^{\frac{p}{2}} =\ & p\big(1 + x^T(t)Qx(t)\big)^{\frac{p-2}{2}} x^T(t)Qf\big(x(t),t\big) \\
& + \frac{1}{2}\ \text{trace}\ \Big(g^T(x(t),t)\big(p(p-2)(1 + x^T(t)Qx(t))^{\frac{p-4}{2}}(x^T(t)Q)^T x^T(t)Q \\
& + p(1 + x^T(t)Qx(t))^{\frac{p-2}{2}} Q\big)g(x(t),t)\Big)\mathrm{d}t \\
& + p\big(1 + x^T(t)Qx(t)\big)^{\frac{p-2}{2}} x^T(t)Qg\big(x(t),t\big)\mathrm{d}B(t) \\
=\ & p\big(1 + x^T(t)Qx(t)\big)^{\frac{p-2}{2}} \Big(x^T(t)Qf(x(t),t) \\
& + \frac{1}{2}\ \text{trace}\ \big(g^T(x(t),t)Qg(x(t),t)\big) + \frac{p-2}{2}\frac{|x^T(t)Qg(x(t),t)|^2}{1 + x^T(t)Qx(t)}\Big)\mathrm{d}t \\
& + p\big(1 + x^T(t)Qx(t)\big)^{\frac{p-2}{2}} x^T(t)Qg\big(x(t),t\big)\mathrm{d}B(t).
\end{aligned} \tag{7}$$

由于存在矩阵U使得

$$Q = U^T U,$$

则

$$
\begin{aligned}
&\big(1+x^T(t)Qx(t)\big)^{-1}|x^T(t)Qg(x(t),t)|^2\\
\le\ &\big(1+x^T(t)Qx(t)\big)^{-1}|Ux(t)|^2|Ug(x(t),t)|^2\\
\le\ &\big(1+x^T(t)Qx(t)\big)^{-1}\big(x^T(t)Qx(t)\big)\ \mathrm{trace}\ g^T\big(x(t),t\big)Qg\big(x(t),t\big)\\
\le\ &\mathrm{trace}\ \big(g^T(x(t),t)Qg(x(t),t)\big),
\end{aligned}
\tag{8}
$$

那么

$$
\begin{aligned}
&\big(1+x^T(t)Qx(t)\big)^{\frac{p}{2}}\\
\le\ &(1+x_0^TQx_0)^{\frac{p}{2}}+p\int_{t_0}^t\big(1+x^T(s)Qx(s)\big)^{\frac{p-2}{2}}\Big(x^T(s)Qf(x(t),s)\\
&+\frac{p-1}{2}\ \mathrm{trace}\ g^T\big(x(t),s\big)Qg\big(x(t),s\big)\Big)\mathrm{d}s\\
&+p\int_{t_0}^t\big(1+x^T(s)Qx(s)\big)^{\frac{p-2}{2}}x^T(s)Qg\big(x(t),s\big)\mathrm{d}B(s).
\end{aligned}
\tag{9}
$$

对每一整数 $n\ge 1$，定义停时

$$
\tau_n=T\wedge\inf\big\{t\in[t_0,T]:|x|\ge n\big\}.
$$

显然 $\tau_n\uparrow T$，a.s. 由条件 (5) 和 Itô 积分性质，有

$$
\begin{aligned}
&E\big(1+x^T(t\wedge\tau_n)Qx(t\wedge\tau_n)\big)^{\frac{p}{2}}\\
\le\ &2^{\frac{p-2}{2}}\big(1+E(x_0^TQx_0)^{\frac{p}{2}}\big)+Ep\alpha\int_{t_0}^t\big(1+\big(x(s\wedge\tau_n)^TQx(s\wedge\tau_n)\big)^{\frac{p}{2}}\big)\mathrm{d}s\\
=\ &2^{\frac{p-2}{2}}\big(1+E(x_0^TQx_0)^{\frac{p}{2}}\big)+p\alpha\int_{t_0}^tE\big(1+\big(x^T(s\wedge\tau_n)Qx(s\wedge\tau_n)\big)^{\frac{p}{2}}\big)\mathrm{d}s,
\end{aligned}
\tag{10}
$$

由 Gronwall 不等式[1]，有

$$
E\big(1+x^T(t\wedge\tau_n)Qx(t\wedge\tau_n)\big)^{\frac{p}{2}}\le 2^{\frac{p-2}{2}}\big(1+E(x_0^TQx_0)^{\frac{p}{2}}\big)\mathrm{e}^{p\alpha(t-t_0)}.\tag{11}
$$

当 $n\to\infty$ 时，有

$$
E\big(x^T(t)Qx(t)\big)^{\frac{p}{2}}\le E\big(1+x^T(t)Qx(t)\big)^{\frac{p}{2}}\le 2^{\frac{p-2}{2}}\big(1+E(x_0^TQx_0)^{\frac{p}{2}}\big)\mathrm{e}^{p\alpha(t-t_0)}.
$$

推论 1　$p\ge 2$, $x_0\in L^p(\Omega;R^d)$，K 为任意常数，Q 为非负定矩阵，当加权线性增长条件

$$
\big(f^T(x,t)Qf(x,t)\big)\vee\big(g^T(x,t)Qg(x,t)\big)\le K(1+x^TQx)\tag{12}
$$

成立时，则有不等式 (5) 成立，且

$$
\alpha=\sqrt{K}+\frac{K(p-1)}{2}.
$$

证明 当条件 (12) 成立时，式 (5) 中的

$$\alpha=\sqrt{K}+\frac{K(p-1)}{2}.$$

事实上，由条件 (12) 和基本不等式 $2ab\le a^2+b^2$，可以推出 $\varepsilon>0$，非负定矩阵 $Q=U^TU$，及

$$\begin{aligned}2x^T(t)Qf\big(x(t),t\big) &\le 2\big(\sqrt{\varepsilon}\,|Ux(t)|\big)\Big(\frac{|Uf(x(t),t)|}{\sqrt{\varepsilon}}\Big)\\ &\le \big(\sqrt{\varepsilon}\,|Ux(t)|\big)^2+\Big(\frac{|Uf(x(t),t)|}{\sqrt{\varepsilon}}\Big)^2\\ &\le \big(\varepsilon x^T(t)U^TUx(t)\big)+\Big(\frac{f^T(x(t),t)Qf(x,t)}{\varepsilon}\Big)\\ &\le \varepsilon\big(x^T(t)Qx(t)\big)+\frac{K(1+x^T(t)Qx(t))}{\varepsilon}.\end{aligned}\tag{13}$$

令 $\varepsilon=\sqrt{K}$，得

$$x^T(t)Qf\big(x(t),t\big)\le\sqrt{K}\,\big(1+x^T(t)Qx(t)\big),$$

则

$$\begin{aligned}&x^T(t)Qf\big(x(t),t\big)+\frac{p-1}{2}\ \mathrm{trace}\ g^T\big(x(t),t\big)Qg\big(x(t),t\big)\\ \le&\ \Big(\sqrt{K}+\frac{K(p-1)}{2}\Big)\big(1+x^T(t)Qx(t)\big).\end{aligned}\tag{14}$$

3 几乎必然估计

考虑随机微分方程

$$\mathrm{d}x(t)=f\big(x(t),t\big)\mathrm{d}t+g\big(x(t),t\big)\mathrm{d}B(t),\quad t\in[t_0,\infty),$$

初值条件为 $x(t_0)=x_0\in L^2(\Omega;R^n)$. 假设该方程在 $[t_0,\infty)$ 上有唯一一个全局解 $x(t)$.

定义 1 依赖于二次型的样本路径

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\big(x^T(t)Qx(t)\big)^{\frac{1}{2}},$$

称为加权样本 Lyapunov 指数，其中 Q 为非负定矩阵.

令 $0<p\le 2$，由定理 1 可知，加权后的解的 p 阶矩满足

$$E\big(x^T(t)Qx(t)\big)^{\frac{p}{2}}\le\frac{p-2}{2}\big(1+E(x_0^TQx_0)\big)^{\frac{p}{2}}\mathrm{e}^{p\alpha(t-t_0)},\quad t\ge t_0.\tag{15}$$

这就意味着解的二次型 p 阶矩是最多以参数为 $p\alpha$ 的指数增长. 因此，我们可以有另一种表达形式

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\big(E(x^T(t)Qx(t))^{\frac{p}{2}}\big)\le p\alpha.$$

上式左端当矩阵 Q 为单位矩阵时，我们称之为 p 阶矩 Lyapunov 指数. 上式表明 p 阶矩 Lyapunov 指数不会超过 $p\alpha$. 在本节中，我们将做解的几乎必然估计. 首先，我们估计

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\big(x^T(t)Qx(t)\big)^{\frac{1}{2}}.$$

引理 3 (指数鞅不等式) 令 $g=(g_1,\cdots,g_n)\in\mathscr{L}^2(R,R^n)$, T, α, β 是任意的正数，那么

$$P\Big\{\sup_{t_0\le t\le T}\Big[\int_{t_0}^t g(s)\mathrm{d}B(s)-\frac{\alpha}{2}\int_{t_0}^t|g(s)|^2\mathrm{d}s\Big]>\beta\Big\}\le \mathrm{e}^{\alpha\beta}.$$

定理 2 在加权单边增长条件 (5) 下，随机微分方程解的加权样本 Lyapunov 指数将不会大于 α，即对任意的 $t\ge t_0$，有

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\big(x^T(t)Qx(t)\big)^{\frac{1}{2}}\le\alpha,\quad \text{a.s.}. \tag{16}$$

证明 由 Itô 公式和加权单边增长条件 (5)，有

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}\big(1+(x^T(t)Qx(t))\big)\\ =\ &\big(2x^T(t)Qf(x(t),t)+\text{trace}\ g^T(x(t),t)Qg(x(t),t)\big)\mathrm{d}t+2x^T(t)Qg\big(x(t),t\big)\mathrm{d}B(t).\end{aligned}$$

那么

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}\log\big(1+(x^T(t)Qx(t))\big)\\ =\ &\Big(\frac{2x^T(t)Qf(x(t),t)+\text{trace}\ (g^T(x(t),t)Qg(x(t),t))}{1+(x^T(t)Qx(t))}\\ &-2\ \text{trace}\ \Big(g^T(x(t),t)Q^Tx(t)\frac{1}{(1+(x^T(t)Qx(t)))^2}x^T(t)Qg(x(t),t)\Big)\Big)\mathrm{d}t\\ &+\frac{2x^T(t)Qg(x(t),t)}{1+(x^T(t)Qx(t))}\mathrm{d}B(t).\end{aligned} \tag{17}$$

两边积分，得

$$\begin{aligned}&\log\big(1+(x^T(t)Qx(t))\big)\\ =\ &\log\big(1+(x_0^TQx_0)\big)+\int_{t_0}^t\frac{1}{1+(x^T(r)Qx(r))}\big(2x^T(r)Qf(x(r),r)\\ &+\text{trace}\ \big(g^T(x(r),r)Qg(x(r),r)\big)\big)\mathrm{d}r-2\int_{t_0}^t\frac{|x^T(r)Qg(x(r),r)|^2}{(1+(x^T(r)Qx(r)))^2}\mathrm{d}r\\ &+2\int_{t_0}^t\frac{x^T(r)Qg(x(r),r)}{1+(x^T(r)Qx(r))}\mathrm{d}B(r)\\ \le\ &\log\big(1+(x_0^TQx_0)\big)+2\alpha(t-t_0)-2\int_{t_0}^t\frac{|x^T(r)Qg(x(r),r)|^2}{(1+(x^T(r)Qx(r)))^2}\mathrm{d}r\\ &+2\int_{t_0}^t\frac{x^T(r)Qg(x(r),r)}{1+(x^T(r)Qx(r))}\mathrm{d}B(r).\end{aligned} \tag{18}$$

令

$$M(t)=2\int_{t_0}^{t}\frac{x^T(r)Qg(x(r),r)}{1+(x^T(r)Qx(r))}\mathrm{d}B(r).$$

由引理3，对任一整数$n\geq t_0$可得

$$P\Big(\sup_{t_0\leq t\leq n}\Big(M(t)-2\int_{t_0}^{t}\frac{|x^T(r)Qg(x(r),r)|^2}{(1+(x^T(r)Qx(r)))^2}\mathrm{d}r\Big)>2\log n\Big)\leq\frac{1}{n^2}.$$

由Borel-Cantelli定理[1]，对几乎所有的$\omega\in\Omega$，存在一个随机整数$n_0=n_0(\omega)\geq t_0+1$，使得

$$\sup_{t_0\leq t\leq n}\Big[M(t)-2\int_{t_0}^{t}\frac{|x^T(r)Qg(x(r),r)|^2}{(1+(x^T(r)Qx(r)))^2}\mathrm{d}r\Big]\leq 2\log n,\quad n\geq n_0,$$

即

$$M(t)\leq 2\log n+2\int_{t_0}^{t}\frac{|x^T(r)Qg(x(r),r)|^2}{(1+(x^T(r)Qx(r)))^2}\mathrm{d}r,\quad t_0\leq t\leq n,\quad n\geq n_0,\quad \text{a.s.}.\tag{19}$$

因此，对几乎所有的$\omega\in\Omega$，有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{t}\log\big(1+(x^T(t)Qx(t))\big)\\ \leq\ &\frac{1}{n-1}\big[\log(1+(x_0^TQx_0))+2\alpha(n-t_0)+2\log n\big],\quad n\geq n_0,\quad n-1\leq t\leq n,\end{aligned}$$

那么

$$\begin{aligned}&\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\big(x^T(t)Qx(t)\big)^{\frac{1}{2}}\\ \leq\ &\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{2t}\log\big(1+x^T(t)Qx(t)\big)\\ \leq\ &\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{2(n-1)}\big[\log(1+x_0^TQx_0)+2\alpha(n-t_0)+2\log n\big]=\alpha,\quad \text{a.s.}.\end{aligned}\tag{20}$$

考虑加权线性增长条件(12)，存在一常数$K>0$使得对所有$(x,t)\in R^d\times[t_0,\infty)$，有

$$f^T\big((x,t)Qf(x,t)\big)\vee\big(g^T(x,t)Qg(x,t)\big)\leq K(1+x^TQx).$$

易知，在加权单边增长条件中$\alpha=\sqrt{K}+\frac{K}{2}$. 因此，我们容易证明下面的推论.

推论2 在加权线性增长条件(12)下，方程(1)的解的加权样本Lyapunov指数不超过$\sqrt{K}+\frac{K}{2}$，即

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\big(x^T(t)Qx(t)\big)^{\frac{1}{2}}\leq\sqrt{K}+\frac{K}{2}.$$

最后我们指出，在加权线性增长条件(12)下，记

$$M(t)=2\int_{t_0}^{t}\frac{x^T(r)Qg(x(t),r)}{1+(x^T(r)Qx(r))}\mathrm{d}B(r)$$

为连续局部鞅，那么平方变差为

$$\langle M(t),M(t)\rangle_t=4\int_{t_0}^{t}\frac{|x^T(r)Qg(x(t),r)|^2}{(1+(x^T(r)Qx(r)))^2}\mathrm{d}r\leq 4K(t-t_0).$$

因此

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{\langle M(t),M(t)\rangle_t}{t}\le 4K,\quad \text{a.s.},$$

则

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{M(t)}{t}=0,\quad \text{a.s.},$$

但是，加权单边增长条件并不能保证

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{M(t)}{t}=0,\quad \text{a.s.}$$

成立.

4　小结

本文是在随机微分方程解的向量形式的基础上把向量形式推广到二次型，把对解的Euclid范数形式的估计推广到二次型，这样有助于解决控制领域中的稳定性问题，使得在应用Lyapunov直接法解决稳定性问题时，用二次型来代替Lyapunov函数是可行的，这样就有利于找到确定的Lyapunov函数，从而使问题具体化，也方便了控制工程方面人员的研究工作，这也是本文的意义所在.

参考文献：

[1] Mao X. Stochastic Differential Equations and Applications[M]. Chichester: Horwood Publishing, 1997

[2] Muhando E B, Tomonobu S, Hiroshi K, *et al*. Augmented LQG controller for enhancement of online dynamic performance for WTG system[J]. Renewable Energy, 2008, 33(8): 1942-1952

[3] Bishwal J P N. Large deviations inequalities for the maximum likelihood estimator and the Bayes estimators in nonlinear stochastic[J]. Statistics and Probability Letters, 1999, 43: 207-215

[4] 江明辉，沈轶，廖晓昕. 变时滞随机微分方程的指数稳定性[J]. 工程数学学报，2006, 23(6): 961-965
Jiang M H, Shen Y, Liao X X. Exponential stability of stochastic differential equation with time-varying delay[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2006, 23(6): 961-965

[5] 李宏飞，周军. 一类线性中立型摄动系统基于LMI方法的反馈镇定[J]. 工程数学学报，2006, 23(4): 663-670
Li H F, Zhou J. Feedback stabilization for a class of linear systems with structure disturbances based on LMI method[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2006, 23(4): 663-670

[6] 郑大钟. 线性系统理论[M]. 北京：清华大学出版社，1990
Zheng D Z. Theroy of Linear System[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1990

[7] 郭尚来. 随机控制[M]. 北京：清华大学出版社，1999
Guo S L. Stochastic Control[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1999

[8] 赵琳，罗汉，刘京. 加权马氏距离判别分析方法及其权值确定[J]. 经济数学，2007, 24: 185-188
Zhao L, Luo H, Liu J. Weighted Mahalanobis distance and the weight-determining method[J]. Mathematics in *Economics*, 2007, 24: 185-188

[9] 胡良剑，赵伟国，冯玉瑚. 伊藤型模糊随机微分方程[J]. 工程数学学报，2006, 23(1): 52-62
Hu L J, Zhao W G, Feng Y H. Fuzzy stochastic differential equations of the Itô-type[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2006, 23(1): 52-62

[10] Has'minskii R Z. Stochastic Stability of Differential Equations[M]. Alphen aan den Rijn, The Netherlands: Sijtjoff and Noordhoff, 1980

[11] Mao X. Lyapunov's second method for stochastic differential equations[C]// Proceedings of International Conference on Differential Equations, edited by B. Fiedler, K. Groger and J. Sprekels, World Scientific, 2000, 1: 136-141

[12] Bensoussan A, Turib J. Stochastic variational inequalities for elasto-plastic oscillators[J]. Comptes Rendus Mathematique, 2006, 343(6): 399-406

Quadratic Estimation to Solution of Stochastic Differential Equations

MA Hong-qiang[1], HU Liang-jian[2,†]

(1- Shanghai Institute of Visual Art, Fudan University, shanghai 201620;
2- Department of Applied Mathematics, Donghua University, Shanghai 201620)

Abstract: Since most stochastic differential equations (SDE) are not explicitly solvable, it is very important to find the estimation of the solution in the form of inequalities. In the research on stability analysis and control design of the stochastic systems, Lyapunov functions often take the quadratic forms. The aim of this paper is to extend the estimation from the classical Euclidean form to the quadratic form, including moment estimation and almost surely estimation of the SDE solution. As the results, the upper limits of moment estimation and sample Lyapunov index in quadratic function of solution are given under weighted linear growth condition and weighted one-side growth condition, respectively.

Keywords: stochastic differential equations; moment estimation; almost surely estimation; quadratic form

Received: 12 May 2008. **Accepted:** 23 Nov 2009.

† **Corresponding author:** L. Hu. E-mail address: ljhu@dhu.edu.cn